

Optimierungswettbewerb 2004

Betrachten wir die 20 grössten Schweizer Städte und nehmen wir an, dass alle unter ihnen mit einem mobilen Telefonsender ausgerüstet seien. Das Problem besteht nun darin, jedem der 20 Sender eine Sendefrequenz zuzuordnen, sodass sich die Frequenzen zweier benachbarten Sender genügend unterscheiden, um Interferenzen zu vermeiden. Die Bandbreite der verfügbaren Frequenzen ist limitiert und muss daher möglichst klein gehalten werden, d.h. die Differenz zwischen der grössten und der kleinsten Frequenz sollte möglichst gering sein. Dieses Zuordnungsproblem der Frequenzen kann mit Hilfe eines Graphen modelliert werden.

Mathematische Formulierung

Sei $G = (V, E, T)$ ein Graph, der aus einer Menge von Knoten V , einer Menge von Kanten E (Verbindungen zwischen den Knoten) und einer Menge von Separatoren T bestehe. Zudem sei $\text{dist}(v_i, v_j)$ die Flugdistanz in Kilometer zwischen den Städten v_i und v_j .

Jeder Stadt $v \in V$ werde ein Knoten im Graphen zugeordnet. Zwei Städte v_i und v_j ($i < j$) seien miteinander durch eine Kante $e_{ij} \in E$ im Graphen verbunden, wenn die Distanz $\text{dist}(v_i, v_j)$ zwischen ihnen 50 Kilometer unterschreite. Ausserdem sei jeder Kante $e_{ij} \in E$ ein Separator $t_{ij} \in T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ zugeordnet, welcher umgekehrt proportional zur Distanz $\text{dist}(v_i, v_j)$ berechnet wurde, d.h. je kleiner die Distanz zwischen zwei Städte v_i und v_j sei, desto grösser sei der Separator.

Es geht nun darum, jedem Knoten $v_i \in V$ eine Frequenz $f_i \in \{1, 2, 3, \dots\}$ so zuzuordnen, dass $|f_i - f_j| \geq t_{ij}$ für jede Kante $e_{ij} \in E$ gilt, wobei $|f_i - f_j|$ die absolute Differenz zwischen den beiden Frequenzen f_i und f_j sei.

Die benutzte Bandbreite, d.h. die Differenz der kleinsten zur grössten Frequenz, soll nun möglichst klein sein. Dies bedeutet, dass folgende Funktion zu minimieren ist:

$$\text{Bandbreite}(f) = \text{Max} \dots$$

Beispiel

Betrachten wir einen Graphen mit 5 Knoten, bestehend aus den 5 Städten Biel, La Chaux-de-Fonds, Neuenburg, Yverdon und Lausanne. Die Kanten e_{ij} des Graphen und die Separatoren t_{ij} entnehme man der Abbildung. Die Zuordnung der Frequenzen der linken Abbildung resultiert in einer Bandbreite von 11. Dies ist aber nicht optimal, denn die Zuordnung der rechten Abbildung resultiert in einer geringeren Bandbreite von 9.

Wettbewerbsorganisation

Die Daten des Wettbewerbs zu diesem Problem können von der Internetadresse www.asro.ch bezogen werden. Dies beinhaltet die Liste der 20 grössten Schweizer Städte, den Kanten $e_{ij} \in E$ zwischen den Städten, deren Distanzen kleiner als 50 Kilometer sind, und den ihnen zugeordneten Separatoren t_{ij} ($1 \leq i, j \leq 20$).

Die Lösung muss als Excel-Datei `solution.xls`, die ebenfalls unter der obigen Internet-Adresse zu finden ist, an die Adresse info@asro.ch eingeschickt werden. Die Datei muss auch die persönliche Adresse des Teilnehmers, eine kurze Beschreibung der verwendete

Lösungsmethode, eine Routine, die es erlaubt, die Zulässigkeit der erhaltenen Lösung zu verifizieren, sowie die gefunden Bandbreite, enthalten.

Der Einsendeschluss ist auf Freitag, den 17. Dezember 2004, festgelegt.

Reglement

Der Wettbewerb ist ausschliesslich für Gymnasiasten in der Schweiz reserviert.

Die ASRO ermutigt die Teilnehmer ausdrücklich, ein Modell auf dem Computer zu programmieren, um die optimale Frequenzzuordnung zu errechnen. "Manuelle" Methoden sind aber ebenfalls zugelassen.

Nur Lösungen, die innerhalb der gesetzten Frist eingereicht werden, werden berücksichtigt.

Die ASRO wird die drei besten Lösungen mit den geringsten Bandbreiten, auswählen. Bei gleichen Lösungen werden diejenigen ausgewählt, die am frühesten an die Adresse info@asro.ch eingesendet worden sind.

Preis

Drei Preise werden vergeben mit einen Gesamtbetrag von 4'000 SFR. Die Sieger können ihre Preise an der Generalversammlung der ASRO im Mai 2005 entgegennehmen.